2021,**41A**(6):1750–1767

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

http://actams.wipm.ac.cn

一类带有两个参数的临界薛定谔 - 泊松方程的多重解

[1] 陈永鹏　[2] 杨志鹏*

([1] 广西科技大学理学院　广西柳州 545006; [2]Georg-August-University of Göttingen, Göttingen 37073)

摘要：该文研究如下一类临界薛定谔 - 泊松方程

$$\begin{cases} -\Delta u+\lambda V(x)u+\phi u=\mu|u|^{p-2}u+|u|^4u, & x\in\mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中 $\lambda>0,\mu>0$ 是两个参数，$p\in(4,6)$, V 满足一些势井条件. 当参数 λ 充分大时，利用变分法证明了基态解的存在性，以及随着 $\lambda\to\infty$ 时，这些解的渐近行为. 另外，在参数 λ 充分大和 μ 充分小时，利用 Ljusternik-Schnirelmann 理论，到了多重解的存在性定理.

关键词：临界指标；渐近行为；多重解.

MR(2010) 主题分类：35A15; 35B40; 35J20　**中图分类号**：O175.2　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2021)06-1750-18

1 主要结果

本文主要研究如下临界薛定谔 - 泊松方程

$$\begin{cases} -\Delta u+\lambda V(x)u+\phi u=\mu|u|^{p-2}u+|u|^4u, & x\in\mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\lambda>0,\mu>0$ 是两个参数，$p\in(4,6)$, V 满足以下假设：

(V_1) $V(x)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的连续函数，并且 $V(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^3$.

(V_2) 存在常数 $M_0>0$ 使得集合 $A:=\{x\in\mathbb{R}^3: V(x)\leq M_0\}$ 非空，并且其 Lebesgue 测度 $m(A)<\infty$.

(V_3) $\Omega:=int\{V^{-1}(0)\}$ 是一个非空光滑有界区域，并且 $\bar{\Omega}=V^{-1}(0)$. 不失一般性，假设 $0\in\Omega$.

收稿日期: 2020-09-11; 修订日期: 2021-02-26

E-mail: yongpengchen@mail.bnu.edu.cn; yangzhipeng326@163.com

基金项目：广西高校中青年教师科研基础能力提升项目 (2017KY1383, 2021KY0348)

Supported by the Basic Ability Improvement Project of Young and Middle-Aged Teachers in Guangxi Universities(2017KY1383, 2021KY0348)

* 通讯作者

在 (1.1) 式中，第一个方程是非线性薛定谔方程，其中函数 ϕ 满足第二个泊松方程，因此上述方程一般被称为薛定谔 - 泊松方程．这类方程与如下形式的薛定谔方程的驻波解 $e^{-\mathrm{i}Et}u(x)$ 有关

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\Delta\Psi+\widetilde{V}(x)\Psi-f(|\Psi|),\quad x\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R},\tag{1.2}$$

其中 $\widetilde{V}(x)=V(x)+E$, $f(\exp(\mathrm{i}\theta)\xi)=\exp(\mathrm{i}\theta)f(\xi)$, $\theta,\xi\in\mathbb{R}$. 有关这方面的内容，可以参见文献 [3, 8, 10, 14–15, 17, 20–21].

深井位势条件 (V_1)–(V_3) 由 Bartsch 和 Wang[5] 提出，当 $\lambda\to\infty$ 时，这些条件可以使解集中在势井的底部．近年来，带有深井位势的薛定谔方程吸引着广大数学工作者的研究兴趣，在 f 满足不同的增长条件下，许多结果得以建立 [4,13,19,22]．对于临界问题， Clapp 等 [12] 研究了高维情况下的薛定谔方程，得到了多重正解的存在性定理．对于任意 $N\geq 3$ 的维数， Alves 等 [1] 讨论了薛定谔方程正解个数与势井底部的拓扑关系．特别地，在次临界的条件下，当位势分别是正的和变号的情况下， Jiang 等 [16] 和 Zhao 等 [24] 研究了泊松薛定谔方程的解的存在性和解的渐近行为．据我们所知，对于带有深井位势的临界薛定谔泊松方程，问题 (1.1) 还没有结果．在上述参考文献的启发下，我们将讨论基态解的存在性及其渐近行为，另外，利用 Ljusternik-Schnirelman 理论，解的多重性结果也的得以建立．

我们的主要结果如下：

定理 1.1 在条件 (V_1)–(V_3) 下，当 $\lambda>0$ 充分大时，方程 (1.1) 至少有一个基态解 u_λ. 对任意的 λ_n, 当 $\lambda_n\to+\infty$ 时， $\{u_{\lambda_n}\}$ 有一个子列在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中收敛到 u, 并且 u 是如下极限方程的基态解

$$\begin{cases}-\Delta u+\phi u=\mu|u|^{p-2}u+|u|^4u, & x\in\Omega,\\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\Omega.\end{cases}\tag{1.3}$$

定理 1.2 在条件 (V_1)–(V_3) 下，存在 λ^*, $\mu^*>0$, 使得当 $\lambda\geq\lambda^*$, $\mu\leq\mu^*$ 时，方程 (1.1) 至少有 $\mathrm{cat}_{\bar{\Omega}}(\bar{\Omega})$ 个解.

2 准备工作

首先给出一些记号． $B_R(x)$ 表示中心在 $x\in\mathbb{R}^3$ 半径为 $R>0$ 的开球． $C>0$ 表示各种常数． $L^p(\mathbb{R}^3)$ $(1\leq p<+\infty)$ 表示 Lebesgue 空间，其范数定义为

$$|u|_p=\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Sobolev 空间 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 的范数为

$$\|u\|=\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

令

$$E=\Big\{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\ |\ \int_{\mathbb{R}^3}V(x)u^2\mathrm{d}x<\infty\Big\},$$

其内积和范数分别记

$$(u,v)_\lambda=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla v+\lambda V(x)uv)\mathrm{d}x\quad 和\quad \|u\|_\lambda=\Big(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+\lambda V(x)u^2)\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

条件 (V_1) 和 (V_2) 保证了 E 是一个 Hilbert 空间 [23]. 不失一般性，本文假设 $\lambda \geq 1$. 则对任意的 $u \in E$, 存在 $\kappa > 0$, 使得

$$\|u\|_\lambda \geq \kappa \|u\|. \tag{2.1}$$

空间 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是 $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 关于范数 $\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 的完备空间. 对 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 存在唯一的 $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是下述方程的解

$$-\Delta\phi = u^2, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

对于 ϕ_u, 可以用以下积分形式表示

$$\phi_u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{u^2(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

这种形式被称为 Riesz 位势 [18]. 关于上述解 ϕ_u, 我们有如下一些后文需要用到的引理 [25].

引理 2.1 对任意的 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$,

(i) $\phi_u \geq 0$;

(ii) $\phi_u : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 是连续的，并且把有界集映成有界集;

(iii) $\|\phi_u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x \leq C|u|^4_{\frac{12}{5}}$;

(iv) 如果在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中， $u_n \rightharpoonup u$, 则在 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中， $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$;

(v) 如果在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中， $u_n \to u$, 则在 $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中， $\phi_{u_n} \to \phi_u$, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x.$$

定义 $F : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$,

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x.$$

显然，对任意的 $y \in \mathbb{R}^3$ 和 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $F(u(\cdot + y)) = F(u)$. 另外，类似于著名的 Brezis-Lieb 引理 [9], 我们有下面的引理.

引理 2.2 假设在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中有 $u_n \rightharpoonup u$, 且在 $\mathbb{R}^3$ 中有 $u_n \to u$ a.e., 则

(i) $F(u_n - u) = F(u_n) - F(u) + o(1)$;

(ii) 在 $(H^1(\mathbb{R}^3))^{-1}$ 中， $F'(u_n - u) = F'(u_n) - F'(u) + o(1)$.

类似于文献 [8], 把 $\phi = \phi_u$ 带入到 (1.1) 中的第一个方程中，可以得到一个非局部的半线性椭圆方程

$$-\Delta u + \lambda V(x)u + \phi_u u = \mu|u|^{p-2}u + |u|^4u, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

相应的能量泛函

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_\lambda + \frac{1}{4}F(u) - \frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x.$$

易证 $I_{\lambda,\mu}$ 在 E 上良定义，并且 $I_{\lambda,\mu} \in C^1(E,\mathbb{R})$. 我们可以定义

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu} = \{u \in E \setminus \{0\} \mid \langle I'_{\lambda,\mu}(u), u\rangle = 0\}.$$

引理 2.3 对任意的 $u \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$, 存在与 λ 无关的 $\sigma > 0$, 使得

$$\|u\|_\lambda > \sigma \quad 和 \quad I_{\lambda,\mu}(u) \geq \frac{p-2}{2p}\sigma^2.$$

证 对任意的 $u\in N_{\lambda,\mu}$, 假设 $\|u\|_\lambda\le 1$, 由 (2.1) 式，可以得到

$$\|u\|_\lambda^2+F(u)=\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\le C(\|u\|_\lambda^p+\|u\|_\lambda^6).$$

那么第一个结果成立. 另一方面，我们有

$$\begin{aligned}I_{\lambda,\mu}(u)&=\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2+\frac{1}{4}F(u)-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\\&\ge\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2+\frac{1}{4}F(u)-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2+\frac{1}{4}F(u)-\frac{1}{p}(\|u\|_\lambda^2+F(u))\\&\ge(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\|u\|_\lambda^2\ge\frac{p-2}{2p}\sigma^2.\end{aligned}$$

证毕. ▮

引理 2.4 对任意的 $u\in E\setminus\{0\}$, 存在唯一的 $t(u)>0$, 使得 $t(u)u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$, 并且

$$I_{\lambda,\mu}(t(u)u)=\max_{t\ge0}I_{\lambda,\mu}(tu).$$

证 对任意的 $u\in E\setminus\{0\}$, 定义 $g(t)=I_{\lambda,\mu}(tu),\ t\in[0,+\infty)$. 则

$$g(t)=\frac{t^2}{2}\|u\|_\lambda^2+\frac{t^4}{4}F(u)-\frac{t^p\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x.$$

当 $t>0$ 充分小时， $g(t)>0$; 当 $t>0$ 充分大时， $g(t)<0$, 那么存在 $t_0>0$, 使得

$$g'(t_0)=0\quad 和\quad g(t_0)=\max_{t\ge0}g(t)=\max_{t\ge0}I_{\lambda,\mu}(tu).$$

通过 $g'(t_0)=0$, 可得 $t_0u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$.

假如存在 $0<t_1<t_2$, 使得 $t_1u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$, $t_2u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$. 那么

$$\frac{1}{t_1^2}\|u\|_\lambda^2+F(u)=t_1^{p-4}\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x+t_1^2\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{t_2^2}\|u\|_\lambda^2+F(u)=t_2^{p-4}\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x+t_2^2\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x.$$

从而有

$$(\frac{1}{t_1^2}-\frac{1}{t_2^2})\|u\|_\lambda^2=(t_1^{p-4}-t_2^{p-4})\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x+(t_1^2-t_2^2)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x,$$

这导致了矛盾. 证毕. ▮

引理 2.5 对任意的 $\lambda\ge1$ 和 $\mu>0$, 定义

$$c_{\lambda,\mu}=\inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}}I_{\lambda,\mu}(u),\quad c_{\lambda,\mu}^*=\inf_{u\in E\setminus\{0\}}\max_{t\ge0}I_{\lambda,\mu}(tv),\quad c_{\lambda,\mu}^{**}=\inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}I_{\lambda,\mu}(\gamma(t)),$$

其中

$$\Gamma=\{\gamma(t)\in C([0,1],E)\mid\gamma(0)=0,\ I_{\lambda,\mu}(\gamma(1))<0\}.$$

那么, $c_{\lambda,\mu}=c_{\lambda,\mu}^{*}=c_{\lambda,\mu}^{**}$.

证 分三步进行证明.

第一步 $c_{\lambda,\mu}^{*}=c_{\lambda,\mu}$. 利用引理 2.4, 有

$$c_{\lambda,\mu}^{*}=\inf_{u\in E\setminus\{0\}}\max_{t\geq 0}I_{\lambda,\mu}(tu)=\inf_{u\in E\setminus\{0\}}I_{\lambda,\mu}(t(u)u)=\inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}}I_{\lambda,\mu}(u)=c_{\lambda,\mu}.$$

第二步 $c_{\lambda,\mu}^{*}\geq c_{\lambda,\mu}^{**}$. 利用引理 2.4, 对任意的 $u\in E\setminus\{0\}$, 存在充分大的 T, 使得 $I_{\lambda,\mu}(Tu)<0$. 定义 $\gamma(t)=tTu$, $t\in[0,1]$. 那么 $\gamma(t)\in\Gamma$, 从而有

$$c_{\lambda,\mu}^{**}=\inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))\leq\sup_{t\in[0,1]}I_{\lambda,\mu}(\gamma(t))\leq\max_{t\geq 0}I_{\lambda,\mu}(tu).$$

所以 $c_{\lambda,\mu}^{*}\geq c_{\lambda,\mu}^{**}$.

第三步 $c_{\lambda,\mu}^{**}\geq c_{\lambda,\mu}$. 对任意的 $u\in E\setminus\{0\}$, 当 $\|u\|_\lambda$ 充分小时，我们有

$$\|u\|_\lambda^2+F(u)>\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

那么必定有 $\gamma(t)\in\Gamma$ 与 $N_{\lambda,\mu}$ 相交. 否则，利用 $\gamma(t)$ 的连续性，用 $\gamma(1)$ 代替 u, (2.2) 式仍然成立，从而可以得到

$$\begin{aligned}I_{\lambda,\mu}(\gamma(1))&=\frac{1}{2}\|\gamma(1)\|_\lambda^2+\frac{1}{4}F(\gamma(1))-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|\gamma(1)|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|\gamma(1)|^6\mathrm{d}x\\&\geq\frac{1}{2}\|\gamma(1)\|_\lambda^2+\frac{1}{4}F(\gamma(1))-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|\gamma(1)|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|\gamma(1)|^6\mathrm{d}x\\&\geq\frac{1}{2}\|\gamma(1)\|_\lambda^2+\frac{1}{4}F(\gamma(1))-\frac{1}{p}(\|\gamma(1)\|_\lambda^2+F(\gamma(1)))\\&\geq(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\|\gamma(1)\|_\lambda^2>0,\end{aligned}$$

这与 $\gamma(1)$ 的定义矛盾，所以 $c_{\lambda,\mu}^{**}\geq c_{\lambda,\mu}$. 证毕. ▌

引理 2.6 $I_{\lambda,\mu}$ 具有山路几何结构.

(1) 存在与 λ 无关的 $a_0,r_0>0$ 使得当 $u\in E$ 且 $\|u\|_\lambda=r_0$ 时， $I_{\lambda,\mu}(u)\geq a_0$.

(2) 对任意的 $u\in E\setminus\{0\}$, $\lim\limits_{t\to\infty}I_{\lambda,\mu}(tu)=-\infty$.

证 这个证明是标准的，略去证明过程. ▌

引理 2.7 对任意的 $\lambda\geq 1$, $\mu>0$, $c_{\lambda,\mu}<\frac{1}{3}S^{3/2}$.

证 这个证明是标准的，略去证明过程. ▌

引理 2.8 $I_{\lambda,\mu}$ 的任意的 $(PS)_{c_{\lambda,\mu}}$ 序列 $\{u_n\}$ 是有界的，并且

$$\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|_\lambda\leq\sqrt{\frac{2p}{p-2}c_{\lambda,\mu}}.$$

证 假设 $\{u_n\}$ 是 $I_{\lambda,\mu}$ 的 $(PS)_{c_{\lambda,\mu}}$ 序列，则有 $I_{\lambda,\mu}(u_n)\to c_{\lambda,\mu}, I'_{\lambda,\mu}(u_n)\to 0$. 因此

$$\begin{aligned}c_{\lambda,\mu}+o(1)+o(1)\|u_n\|_\lambda&=I_{\lambda,\mu}(u_n)-\frac{1}{p}\langle I'_{\lambda,\mu}(u_n),v_n\rangle\\&=(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\|u_n\|_\lambda^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{p})F(u_n)+(\frac{1}{p}-\frac{1}{6})\int_{\mathbb{R}^3}u_n^6\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而有

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\|u_n\|_\lambda^2 \le c_{\lambda,\mu}+o(1)+o(1)\|u_n\|_\lambda.$$

那么 $\{u_n\}$ 在 E 中是有界，并且第二个结论成立．证毕．

引理 2.9 令 $M>0$ 是个常数，当 $n\to\infty$ 时， $\lambda_n\to\infty$. 如果 $\|u_n\|_{\lambda_n}\le M$, 并且在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中有 $u_n\rightharpoonup 0$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^q\mathrm{d}x=0$, $2<q<6$.

证 对任意的 $R>0$, 令

$$A(R):=\left\{x\in\mathbb{R}^3 | |x|\ge R,\ V(x)\ge M_0\right\},\ B(R):=\left\{x\in\mathbb{R}^3 | |x|\ge R,\ V(x)\le M_0\right\}.$$

容易得到

$$\begin{aligned}\int_{A(R)}u_n^2\mathrm{d}x &\le \frac{1}{\lambda_n M_0}\int_{A(R)}\lambda_n V(x)u_n^2\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{\lambda_n M_0}\int_{A(R)}(|\nabla u_n|^2+\lambda_n V(x)u_n^2)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{\lambda_n M_0}\|u_n\|_{\lambda_n}^2\le\frac{1}{\lambda_n M_0}M^2 \end{aligned}\tag{2.3}$$

和

$$\begin{aligned}\int_{B(R)}u_n^2\mathrm{d}x &\le [m(B(R))]^{\frac{2}{3}}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}u_n^6\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{3}}\\ &\le [m(B(R))]^{\frac{2}{3}}S^{-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\\ &\le M^2S^{-1}[m(B(R))]^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}\tag{2.4}$$

利用内插不等式，存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}\int_{B_R^c}|u_n|^q\mathrm{d}x &\le \Big(\int_{B_R^c}|u_n|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{q\theta}{2}}\Big(\int_{B_R^c}|u_n|^6\mathrm{d}x\Big)^{\frac{q(1-\theta)}{6}}\\ &\le S^{-\frac{q(1-\theta)}{2}}\Big(\int_{B_R^c}|u_n|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{q\theta}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{q(1-\theta)}{2}}\\ &\le S^{-\frac{q(1-\theta)}{2}}M^{q(1-\theta)}\Big(\int_{A(R)}|u_n|^2\mathrm{d}x+\int_{B(R)}|u_n|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{q\theta}{2}}. \end{aligned}$$

利用 (2.3) 和 (2.4) 式，存在 $C>0$, 使得

$$\int_{B_R^c}|u_n|^q\mathrm{d}x\le C\Big(\frac{1}{\lambda_n}+[m(B(R))]^{\frac{2}{3}}\Big).\tag{2.5}$$

由假设 (V_2) 和 (2.5) 式，对任意的 $\epsilon>0$, 存在 $N_\epsilon, R_\epsilon>0$, 当 $n\ge N_\epsilon$, $R\ge R_\epsilon$ 时，有

$$\int_{B_R^c}|u_n|^q\mathrm{d}x\le\epsilon,\tag{2.6}$$

固定 $R_1>R_\epsilon$. 那么，当 $n\ge N_\epsilon$ 时，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^q\mathrm{d}x=\int_{B_{R_1}}|u_n|^q\mathrm{d}x+\int_{B_{R_1}^c}|u_n|^q\mathrm{d}x\le\int_{B_{R_1}}|u_n|^q\mathrm{d}x+\epsilon.$$

由于在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中， $u_n \rightharpoonup 0$, 利用上述不等式可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^q\mathrm{d}x=0.$$

证毕. ∎

为了给 $c_{\lambda,\mu}$ 找一个新的上界，我们需要研究 "极限" 问题 (1.3). 定义空间 $H_0^1(\Omega)$ 的范数如下

$$\|u\|_0:=\Big(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

相应的能量泛函

$$I_\mu(u)=\frac{1}{2}\|u\|_0^2+\frac{1}{4}F_0(u)-\frac{\mu}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x,$$

其中 $F_0(u)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega\times\Omega}\frac{u^2(x)u^2(y)}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 容易证明 I_μ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上良定义,并且 $I_\mu\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$. 定义

$$\mathcal{N}_\mu=\{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\mid\langle I_\mu'(u),u\rangle=0\},c_\mu=\inf_{u\in\mathcal{N}_\mu}I_\mu(u).$$

注 2.1 对于 c_μ, I_μ, $\mathcal{N}_\mu$, 有类似于引理 2.3 到引理 2.7 的结果成立. 通过山路定理，可以证明存在 $u\in H_0^1(\Omega)$, 使得 $I_\mu(u)=c_\mu$, $I_\mu'(u)=0$.

引理 2.10 对于 $\lambda\geq 1$, $\mu>0$, $c_{\lambda,\mu}\leq c_\mu$.

证 对于 $u\in\mathcal{N}_\mu$, 我们有

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega\phi_u u^2\mathrm{d}x=\mu\int_\Omega|u|^{p-2}u\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^4u\mathrm{d}x.$$

利用 $V(x)=0,x\in\Omega$, 以及 $u=0,x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega$, 上述等式可以写为

$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+\lambda V(x)u^2)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x=\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p-2}u\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u|^4u\mathrm{d}x.$$

因此， $u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$. 另一方面，我们有

$$\begin{aligned}I_\mu(u)&=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+\lambda V(x)u^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\mathrm{d}x-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x\\&=I_{\lambda,\mu}(u).\end{aligned}$$

从而， $c_{\lambda,\mu}\leq c_\mu$. 证毕. ∎

推论 2.1 由注 2.1 知， $c_\mu<\dfrac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$, 则对于 $\lambda\geq 1$, $\mu>0$, 存在 $\tau=\tau(\mu)>0$, 使得 $c_{\lambda,\mu}<\dfrac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}-\tau$.

引理 2.11 存在 $\lambda^*>0$, 当 $\lambda\geq\lambda^*$ 时，对任意的 $d_\lambda\in(0,\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}-\tau)$, $I_{\lambda,\mu}$ 满足 $(PS)_{d_\lambda}$ 条件.

证 令 $\{u_n\}$ 是 $I_{\lambda,\mu}$ 的 $(PS)_{d_\lambda}$ 序列，满足 $I_{\lambda,\mu}(u_n)\to d_\lambda, I_{\lambda,\mu}'(u_n)\to 0$. 利用引理 2.8, $\{u_n\}$ 在 E 中有界. 因此，存在 $u\in E$, 在 E 中， $u_n\rightharpoonup u$, 在 $\mathbb{R}^3$ 中， $u_n\to u$, a.e., 在

$L^q(\mathbb{R}^3), 2 \le q \le 6$ 中， $u_n \rightharpoonup u$. 定义 $v_n = u_n - u$. 利用引理 2.2, $\{v_n\}$ 也是 $I_{\lambda,\mu}$ 的 PS 序列，并且 $I_{\lambda,\mu}(v_n) \to d_\lambda - I_{\lambda,\mu}(u), I'_{\lambda,\mu}(v_n) \to 0$, 则有

$$o_n(1) = \langle I'_{\lambda,\mu}(v_n), v_n \rangle = \|v_n\|_\lambda^2 + F(v_n) - \mu \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^p \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^6 \mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

利用 $\{v_n\}$ 的有界性，可以假设

$$\|v_n\|_\lambda^2 \to L_\lambda^{(1)}, \quad F(v_n) \to L_\lambda^{(2)}, \quad \mu \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^p + \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^6 \to L_\lambda^{(3)}. \tag{2.8}$$

从而

$$L_\lambda^{(1)} + L_\lambda^{(2)} = L_\lambda^{(3)}. \tag{2.9}$$

如果 $L_\lambda^{(1)} = 0$, 则 $v_n \to 0$, 由此可以得到，在 E 中， $u_n \to u$. 以下我们证明当 λ 充分大时，$L_\lambda^{(1)} = 0$. 否则，假设 $\mu \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^p \mathrm{d}x \to A_\lambda, \int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^6 \to B_\lambda$. 从而可以得到

$$L_\lambda^{(1)} + L_\lambda^{(2)} = L_\lambda^{(3)} = A_\lambda + B_\lambda. \tag{2.10}$$

类似于引理 2.9 的证明，当 $\lambda \to \infty$ 时， $A_\lambda = o_\lambda(1), L_\lambda^{(2)} = o_\lambda(1)$. 所以

$$L_\lambda^{(1)} = B_\lambda + o_\lambda(1). \tag{2.11}$$

利用 (2.7) 式，存在 $C > 0$, 使得

$$\|v_n\|_\lambda^2 \le C\Big(\|v_n\|_\lambda^p + \|v_n\|_\lambda^6 + o_n(1)\Big).$$

如果 $L_\lambda^{(1)} \le 1$, 在上述不等式中，令 $n \to \infty$, 则

$$L_\lambda^{(1)} \le C\Big((L_\lambda^{(1)})^{\frac{p}{2}} + (L_\lambda^{(1)})^3\Big).$$

因此，存在与 λ 无关的 $C > 0$, 使得

$$L_\lambda^{(1)} \ge C. \tag{2.12}$$

利用 S 的定义，我们有

$$S\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^6 \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{3}} \le \|v_n\|_\lambda^2.$$

令 $n \to \infty$, 则

$$SB_\lambda^{\frac{1}{3}} \le L_\lambda^{(1)}. \tag{2.13}$$

利用 (2.11)–(2.13) 式，可以得到

$$\liminf_{\lambda\to\infty} L_\lambda^{(1)} \ge S^{\frac{3}{2}}.$$

由 $I_{\lambda,\mu}(v_n) \to d_\lambda - I_{\lambda,\mu}(u)$, 我们有

$$d_\lambda - I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}\|v_n\|_\lambda^2 + \frac{1}{4}F(v_n) - \frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^6 \mathrm{d}x + o_n(1).$$

令 $n \to \infty$, 可以得到

$$d_\lambda - I_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{2}L_\lambda^{(1)} + \frac{1}{4}L_\lambda^{(2)} - \frac{1}{p}A_\lambda - \frac{1}{6}B_\lambda.$$

注意 $I'_{\lambda,\mu}(u)=0$, 利用引理 2.3, 可以得到 $I_{\lambda,\mu}(u)\geq 0$. 从而

$$\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}-\tau\geq\liminf_{\lambda\to\infty}\Big(\frac{1}{2}L_\lambda^{(1)}+\frac{1}{4}L_\lambda^{(2)}-\frac{1}{p}A_\lambda-\frac{1}{6}B_\lambda\Big)\geq\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\Big)S^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}},$$

这是矛盾的. 证毕.

推论 2.2 存在 $\lambda^*>0$, 当 $\lambda\geq\lambda^*$ 时, 对于 $d_\lambda\in(0,\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}-\tau)$, $I_{\lambda,\mu}$ 在 $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ 上满足 $(PS)_{d_\lambda}$ 条件.

引理 2.12 如果 u 是 $I_{\lambda,\mu}$ 在 $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ 上的临界点, 则 u 是 $I_{\lambda,\mu}$ 在 E 上的临界点.

证 这个证明是标准的, 略去证明过程.

3 基态解的渐近行为

引理 3.1 当 λ 充分大时, 问题 (1.1) 至少有一个基态解.

证 利用引理 2.5 和引理 2.6, $I_{\lambda,\mu}$ 存在 $(PS)_{c_{\lambda,\mu}}$ 序列 $\{u_n\}$. 因此, 利用推论 2.1 和引理 2.11, 当 λ 充分大时, 在子列意义下, 在 E 中, $u_n\to u$. 从而, $I_{\lambda,\mu}(u)=c_{\lambda,\mu}$, $I'_{\lambda,\mu}(u)=0$.

定理 1.1 的证明 由引理 3.1, 存在 $u_n\in\mathcal{N}_{\lambda_n,\mu}$, 使得 $I_{\lambda_n,\mu}(u_n)=c_{\lambda_n,\mu}$, $I'_{\lambda_n,\mu}(u_n)=0$. 由引理 2.8 和引理 2.10 知, 存在 $C>0$, 使得 $\|u_n\|_{\lambda_n}\leq C$. 因此, 注意到 (2.1) 式, 存在 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$, 在 E 中, $u_n\rightharpoonup u$, 在 $\mathbb{R}^3$ 中, $u_n\to u$, a.e., 在 $L^q(\mathbb{R}^3), 2\leq q\leq 6$ 中, $u_n\rightharpoonup u$.

第一步 $u|_{\Omega^c}=0$, 其中 $\Omega^c:=\{x\mid x\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega\}$.

否则, 存在测度不为零的紧子集 $F\subset\Omega^c$, 满足 $dist\{F,\partial\Omega\}>0$ 和 $u|_F\neq 0$, 则 $\int_F u_n^2\mathrm{d}x\to\int_F u^2\mathrm{d}x>0$. 另外, 存在 $\epsilon_0>0$, 使得 $V(x)\geq\epsilon_0, x\in F$.

由 u_n 的选择知

$$\|u_n\|^2_{\lambda_n}+F(u_n)=\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

因此

$$\begin{aligned}I_{\lambda_n,\mu}(u_n)&=\frac{1}{2}\|u_n\|^2_{\lambda_n}+\frac{1}{4}F(u_n)-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\\&\geq\frac{1}{2}\|u_n\|^2_{\lambda_n}+\frac{1}{4}F(u_n)-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\|u_n\|^2_{\lambda_n}+\frac{1}{4}F(u_n)-\frac{1}{p}(\|u_n\|^2_{\lambda_n}+F(u_n))\\&\geq(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\int_F\lambda_nV(x)u_n^2\mathrm{d}x\\&\geq(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})\lambda_n\epsilon_0\int_F u_n^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时, $I_{\lambda_n,\mu}(u_n)\to\infty$, 这与引理 2.7 矛盾, 因此 $u|_{\Omega^c}=0$. 注意到 Ω 为光滑区域, 从而 $u\in H_0^1(\Omega)$.

第二步 $u\neq 0$.

若不然, 利用引理 2.9, 我们有 $\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x=o_n(1)$, $F(u_n)=o_n(1)$. 由 (3.1) 式知

$$\|u_n\|^2_{\lambda_n}=\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x+o_n(1).$$

假设 $\|u_n\|_{\lambda_n}^2 \to b$, $\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 \mathrm{d}x \to b$. 利用引理 2.3, $b \neq 0$. 由 S 的定义，可以得到

$$S\Big(\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{3}} \le \|u_n\|_{\lambda_n}^2.$$

令 $n \to \infty$, 我们有 $S^{\frac{3}{2}} \le b$. 因此，利用注 2.1 可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} &> \lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,\mu} = \lim_{n\to\infty} I_{\lambda_n,\mu}(u_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{2}\|u_n\|_{\lambda_n}^2 + \frac{1}{4}F(u_n) - \frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\Big]\\ &= (\frac{1}{2}-\frac{1}{6})b \ge \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

这是矛盾的.

第三步 $I'_\mu(u) = 0$.

任取测试函数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 由 u_n 的选择知， $\langle I'_{\lambda_n,\mu}(u_n), \varphi\rangle = 0$. 因此有

$$\begin{aligned}0 = &\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u_n \nabla\varphi + \lambda_n V(x) u_n \varphi)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n} u_n\varphi\mathrm{d}x\\ &+\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^{p-2}u_n\varphi\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^4 u_n\varphi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 注意到 $V(x) = 0, x \in \Omega$, 我们有

$$0 = \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\mathrm{d}x + \int_\Omega \phi_u u\varphi\mathrm{d}x + \mu\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^4 u\varphi\mathrm{d}x,$$

这意味着 $\langle I'_\mu(u), \varphi\rangle = 0$.

第四步 $I_\mu(u) = c_\mu$.

由第三步的讨论知 $u \in N_\mu$, 因此 $I_\mu(u) \ge c_\mu$. 从而

$$\begin{aligned}c_\mu &\le I_\mu(u) = I_\mu(u) - \frac{1}{4}\langle I'_\mu(u), u\rangle\\ &= \frac{1}{4}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x + (\frac{1}{4}-\frac{1}{p})\mu\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x + (\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x\\ &\le \liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{4}\int_\Omega|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x + (\frac{1}{4}-\frac{1}{p})\mu\int_\Omega|u_n|^p\mathrm{d}x + (\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\int_\Omega|u_n|^6\mathrm{d}x\Big]\\ &\le \liminf_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x + (\frac{1}{4}-\frac{1}{p})\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x + (\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\Big]\\ &\le \liminf_{n\to\infty}\Big[I_{\lambda_n,\mu}(u_n) - \frac{1}{4}\langle I'_{\lambda_n,\mu}(u_n), u_n\rangle\Big]\\ &= \liminf_{n\to\infty} c_{\lambda_n,\mu} \le c_\mu,\end{aligned}$$

因此， $I_\mu(u) = c_\mu$. 另外，从上面的证明知

$$\lim_{n\to\infty} I_{\lambda_n,\mu}(u_n) = \lim_{n\to\infty} c_{\lambda_n,\mu} = c_\mu = I_\mu(u). \tag{3.2}$$

第五步 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中， $u_n \to u$.

事实上，从第四步的证明知，在子列的意义下，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x,\quad \int_{\mathbb{R}^3}\lambda_nV(x)u_n^2\mathrm{d}x\to 0.$$

因此，$\|u_n-u\|_{\lambda_n}\to 0$. 从而有 $\|u_n-u\|\to 0$. 定理 1.1 证毕.

4 关于山路水平值的几点注记

为了研究 c_μ 的性质，需要分析 $H_0^1(\Omega)$ 上面的能量泛函

$$I_0(u)=\frac{1}{2}\|u\|_0^2+\frac{1}{4}F_0(u)-\frac{1}{6}\int_\Omega|u|^6\mathrm{d}x.$$

可以定义

$$\mathcal{N}_0=\{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}\mid\langle I_0'(u),u\rangle=0\},\quad c_0=\inf_{u\in\mathcal{N}_0}I_0(u).$$

注 4.1 对于 c_0, I_0 , $\mathcal{N}_0$, 有类似于从引理 2.3 到引理 2.6 的结果.

我们还需要空间 $H_{0,rad}^1(B_r(0)):=\{u\in H_0^1(B_r(0))\mid u$ 关于原点径向对称$\}$, 其范数

$$\|u\|_{0,r}:=\Big(\int_{B_r(0)}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

对于 $u\in H_{0,rad}^1(B_r(0))$, 引入能量泛函

$$I_{\mu,r}(u)=\frac{1}{2}\|u\|_{0,r}^2+\frac{1}{4}F_{0,r}(u)-\frac{\mu}{p}\int_{B_r(0)}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{B_r(0)}|u|^6\mathrm{d}x,$$

其中 $F_{0,r}(u)=\frac{1}{4\pi}\iint_{B_r(0)\times B_r(0)}\frac{u^2(x)u^2(y)}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 类似地，可以定义

$$\mathcal{N}_{\mu,r}=\{u\in H_{0,rad}^1(B_r(0))\setminus\{0\}\mid\langle I_{\mu,r}'(u),u\rangle=0\}$$

和

$$c_{\mu,r}=\inf_{u\in\mathcal{N}_{\mu,r}}I_{\mu,r}(u).$$

注 4.2 对于 $c_{\mu,r}$, $I_{\mu,r}$, $\mathcal{N}_{\mu,r}$, 有类似于从引理 2.3 到引理 2.7 的结果. 利用山路定理，可以证明存在 $u\in H_{0,rad}^1(B_r(0))$, 使得 $I_{\mu,r}(u)=c_{\mu,r}$ 和 $I_{\mu,r}'(u)=0$.

引理 4.1 $\lim\limits_{\mu\to 0}c_\mu=c_0$.

证 只需要证明，对任意的 $\mu_n\to 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}c_{\mu_n}=c_0$. 事实上，利用 c_{μ_n} 和 c_0 的定义，可以得到 $c_{\mu_n}\le c_0$. 那么

$$\limsup_{n\to\infty}c_{\mu_n}\le c_0.\tag{4.1}$$

另一方面，利用注 2.1, 存在 $u_n\in H_0^1(\Omega)$, 使得 $I_{\mu_n}(u_n)=c_{\mu_n}$, $I_{\mu_n}'(u_n)=0$. 从注 2.1 知，存在 $t_n>0$, 满足 $t_nu_n\in N_0$, 那么

$$c_0\le I_0(t_nu_n)=I_{\mu_n}(t_nu_n)+\frac{\mu_nt_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x,$$

因此

$$c_0\le c_{\mu_n}+\frac{\mu_nt_n^p}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x.$$

如果 t_n 是有界的，我们有

$$c_0 \le \liminf_{n\to\infty} c_{\mu_n}. \tag{4.2}$$

则由 (4.1) 和 (4.2) 式可以得到结论.

现在证明 $\{t_n\}$ 的有界性．否则， $t_n \to \infty$. 由 u_n 的选择，以及 $c_{\mu_n} < \frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$, 可以得到 $\|u_n\|_0$ 是有界的．因为 $t_n u_n \in N_0$, 我们有

$$\frac{1}{t_n^4}\|u_n\|_0^2 + \frac{1}{t_n^2}F_0(u_n) = \int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x = 0. \tag{4.3}$$

利用 $I'_{\mu_n}(u_n) = 0$, 可以得到

$$\|u_n\|_0^2 + F_0(u_n) = \mu_n \int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x + \int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x.$$

由 (4.3) 式可以得到 $\|u_n\|_0^2 = o_n(1)$. 从而 $c_{\mu_n} \to 0$, 导出矛盾．证毕. ▮

引理 4.2 $c_0 = \frac{1}{3}S^{3/2}$.

证 类似于引理 2.7 的证明，可以得到 $c_0 \le \frac{1}{3}S^{3/2} + o_\epsilon(1)$, 取极限，则有 $c_0 \le \frac{1}{3}S^{3/2}$. 另一方面，存在 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, 使得 $I_0(u_n) \to c_0$, $\quad I'_0(u_n) \to 0$. 利用 $I'_0(u_n) \to 0$, 有

$$o_n(1) = \langle I'_0(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|_0^2 + F_0(u_n) - \int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x.$$

假设 $\|u_n\|_0^2 \to l_1, F_0(u_n) \to l_2, \int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x \to l_3$, 那么，我们有

$$l_1 + l_2 = l_3. \tag{4.4}$$

利用 S 的定义，可以得到 $S(\int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{3}} \le \|u_n\|_0^2$. 令 $n \to \infty$, 则有

$$S l_2^{\frac{1}{3}} \le l_1. \tag{4.5}$$

利用 (4.4) 和 (4.5) 式，我们有

$$l_1 \ge S^{3/2},\ l_3 \ge S^{3/2}. \tag{4.6}$$

由 $I_0(u_n) \to c_0$, 可以得到

$$\begin{aligned}
c_0 &= I_0(u_n) + o_n(1)\\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|_0^2 + \frac{1}{4}F_0(u_n) - \frac{1}{6}\int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x + o_n(1)\\
&= \frac{1}{2}\|u_n\|_0^2 - \frac{1}{4}(\|u_n\|_0^2 - \int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x) - \frac{1}{6}\int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x + o_n(1)\\
&= \frac{1}{4}\|u_n\|_0^2 + \frac{1}{12}\int_\Omega |u_n|^6 \mathrm{d}x + o_n(1)\\
&= \frac{1}{4}l_1 + \frac{1}{12}l_3 + o_n(1).
\end{aligned}$$

注意到 (4.6) 式，从上述不等式就可以得到 $c_0 \ge \frac{1}{3}S^{3/2}$. 证毕. ▮

引理 4.3 对任意充分小的 $r>0$, $\lim\limits_{\mu\to0}c_\mu=\lim\limits_{\mu\to0}c_{\mu,r}=\dfrac{1}{3}S^{3/2}$.

证 由引理 4.1 和引理 4.2 知 $\lim\limits_{\mu\to0}c_\mu=\frac{1}{3}S^{3/2}$. 利用 $c_{\mu,r}$ 的定义，有

$$c_{\mu,r}=\inf_{u\in N_{\mu,r}}I_{\mu,r}(u)\geq\inf_{\{u\in H_0^1(B_r(0))\ |\ \langle I'_{\mu,r}(u),u\rangle=0\}}I_{\mu,r}(u).$$

由于上述式子中最后一项不小于 c_μ, 则可以得到

$$\liminf_{\mu\to0}c_{\mu,r}\geq\frac{1}{3}S^{3/2}.$$

另一方面，类似于引理 2.7 的证明，可以得到 $c_{\mu,r}<\frac{1}{3}S^{3/2}$. 从而有

$$\limsup_{\mu\to0}c_{\mu,r}\leq\frac{1}{3}S^{3/2}.$$

因此，对任意充分小的 $r>0$, $\lim\limits_{\mu\to0}c_{\mu,r}=\frac{1}{3}S^{3/2}$. 证毕. ▮

因为 Ω 是光滑有界区域，可以固定充分小的 $r>0$, 使得

$$\Omega_r^+=\{x\in\mathbb{R}^3\ |\ dist(x,\Omega)\leq r\}$$

和

$$\Omega_r^-=\{x\in\Omega\ |\ dist(x,\partial\Omega)\geq r\}$$

与 Ω 同伦等价. 另外，可以假设 $B_r(0)\subset\Omega$.

对于 $0\neq u\in L^6(\Omega)$, 定义

$$\beta_0(u):=\frac{\int_\Omega xu^6\mathrm{d}x}{\int_\Omega u^6\mathrm{d}x}.$$

引理 4.4 存在 $\mu^*>0$, 当 $\mu\in(0,\mu^*)$, $u\in\mathcal{N}_\mu$ 满足 $I_\mu(u)\leq c_{\mu,r}+o_\mu(1)$ 时，那么 $\beta_0(u)\in\Omega^+_{r/2}$.

证 利用反证法. 假设存在 $\mu_n\to0$, $u_n\in\mathcal{N}_{\mu_n}$, $I_{\mu_n}(u_n)\leq c_{\mu_n,r}+o_n(1)$, 使得 $\beta_0(u_n)\notin\Omega^+_{r/2}$. 利用 $u_n\in\mathcal{N}_{\mu_n}$ 和 $I_{\mu_n}(u_n)\leq c_{\mu_n,r}+o_n(1)$, 可以得到 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中是有界的. 由 $u_n\in\mathcal{N}_{\mu_n}$ 知

$$\|u_n\|_0^2+F_0(u_n)=\mu_n\int_\Omega|u_n|^p\mathrm{d}x+\int_\Omega|u_n|^6\mathrm{d}x.\tag{4.7}$$

因此，注意到 $\mu_n\to0$, 有

$$\begin{aligned}c_{\mu_n}\leq I_{\mu_n}(u_n)&=\frac{1}{2}\|u_n\|_0^2+\frac{1}{4}F_0(u_n)-\frac{\mu_n}{p}\int_\Omega|u_n|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_\Omega|u_n|^6\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\|u_n\|_0^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{p})\mu_n\int_\Omega|u_n|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\int_\Omega|u_n|^6\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\|u_n\|_0^2+\frac{1}{12}\int_\Omega|u_n|^6\mathrm{d}x+o_n(1)\\&\leq c_{\mu_n,r}+o_n(1).\end{aligned}$$

假设 $\|u_n\|_0^2\to l_1$, $\int_\Omega|u_n|^6\mathrm{d}x\to l_2$, 则利用引理 4.3, 有

$$\frac{1}{4}l_1+\frac{1}{12}l_2=\frac{1}{3}S^{3/2}.\tag{4.8}$$

利用 S 的定义，可以得到 $S(\int_\Omega |u_n|^6\mathrm{d}x)^{\frac{1}{3}} \le \|u_n\|_0^2$. 令 $n\to\infty$, 我们有

$$Sl_2^{\frac{1}{3}} \le l_1. \tag{4.9}$$

由 (4.7) 式，可以得到 $\|u_n\|_0^2 \le \int_\Omega |u_n|^6\mathrm{d}x + o_n(1)$. 从而

$$l_1 \le l_2. \tag{4.10}$$

利用 (4.8)–(4.10) 式，可以得到 $l_2 = l_1 = S^{3/2}$.

定义

$$\omega_n = \frac{u_n}{\int_\Omega |u_n|^6\mathrm{d}x}.$$

那我们有 $\int_\Omega |\omega_n|^6\mathrm{d}x = 1$, $\int_\Omega |\nabla\omega_n|^6\mathrm{d}x \to S$. 由文献 [2] 中的引理 3.1 知，存在 $(y_n,\lambda_n)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+$, 满足 $\lambda_n\to 0$, $y_n\to y\in\bar\Omega$, 使得在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 中，当 $n\to\infty$ 时，有

$$v_n(x) := \lambda_n^{\frac{1}{2}}\omega_n(\lambda_n x + y_n) \to \omega.$$

假设 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, 满足 $\phi(x)=x$, $x\in\Omega$. 那么有

$$\beta_0(u_n) = \int_\Omega \phi(x)\omega_n^6(x)\mathrm{d}x = \int \phi(\lambda_n x + y_n)v_n^6(x)\mathrm{d}x,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\beta_0(u_n) = y\in\bar\Omega.$$

这与我们的假设矛盾. 引理 4.4 证毕. ▮

像文献 [6], 选择 $R > 2\mathrm{diam}(\Omega)$, 使得 $\Omega\subset B_R(0)$. 定义

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0\le t\le R,\\ \dfrac{R}{t}, & t\ge R.\end{cases}$$

对于 $u\in L^6(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$, 定义

$$\beta(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3}\psi(|x|)|u|^6 x\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x}.$$

引理 4.5 存在 $\lambda^*>0$, $\mu^*>0$, 当 $u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$, $I_{\lambda,\mu}(u)\le c_{\mu,r}$ 时，对任意的 $\lambda\ge\lambda^*$, $\mu<\mu^*$, 那么 $\beta(u)\in\Omega_r^+$.

证 反证. 假设对任意充分小的 μ, 存在 $\lambda_n\to\infty$, $u_n\in\mathcal{N}_{\lambda_n,\mu}$, 满足 $I_{\lambda_n,\mu}(u_n)\le c_{\mu,r}$, 但是 $\beta(u_n)\notin\Omega_r^+$. 易证 $\{\|u_n\|_{\lambda_n}\}$ 是有界的. 利用定理 1.1 中证明的 第一步, 可以得到 $u\in H_0^1(\Omega)$, 在 E 中， $u_n\rightharpoonup u$, 在 $\mathbb{R}^3$ 中， $u_n\to u$, a.e., 在 $L^q(\mathbb{R}^3), 2\le q\le 6$ 中， $u_n\rightharpoonup u$. 利用引理 2.9, 则在 $L^q(\mathbb{R}^3)$, $2<q<6$ 中， $u_n\to u$. 令 $v_n = u_n - u$, 注意到 $u_n\in\mathcal{N}_{\lambda_n,\mu}$, 则有

$$\begin{aligned}\|v_n\|_{\lambda_n}^2 &= \|u_n\|_{\lambda_n}^2 - \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + o_n(1)\\ &= \mu\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x - F(u_n) - \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + o_n(1)\\ &= \mu\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^p\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x - F(v_n)\\ &\quad +\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x - F(u) - \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + o_n(1)\\ &= \int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x + \mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x - F(u) - \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x + o_n(1).\end{aligned} \tag{4.11}$$

以下，分两种情况.

情况 1 $\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\le F(u)+\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$.

利用 (4.11) 式，则有

$$\|v_n\|_{\lambda_n}^2\le\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x+o_n(1).\tag{4.12}$$

那么必定有 $\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x\to 0$. 否则，存在 $b>0$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x\to b.\tag{4.13}$$

利用 S 的定义，以及 (4.12) 式，我们有

$$S\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{3}}\le\|v_n\|_{\lambda_n}^2\le\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x+o_n(1).\tag{4.14}$$

因此，利用 (4.13) 式，可以得到 $b\ge S^{\frac{3}{2}}$.

另一方面，注意到 $u_n\in\mathcal{N}_{\lambda_n,\mu}$, 有

$$\begin{aligned}I_{\lambda_n,\mu}(u_n)&=\frac{1}{2}\|u_n\|_{\lambda_n}^2+\frac{1}{4}F(u_n)-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\|u_n\|_{\lambda_n}^2+(\frac{\mu}{4}-\frac{\mu}{p})\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\|v_n\|_{\lambda_n}^2+\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+(\frac{\mu}{4}-\frac{\mu}{p})\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x+o_n(1)\\&\ge\frac{1}{4}S\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|v_n|^6\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{12}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x+o_n(1).\end{aligned}$$

由 $I_{\lambda_n,\mu}(u_n)\le c_{\mu,r}$ 和 (4.13) 式，可以得到

$$\frac{1}{4}Sb^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{12}b\le c_{\mu,r}.$$

从而有 $c_{\mu,r}\ge\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$, 这是不对的. 因此，在 $L^6(\mathbb{R}^3)$ 中， $u_n\to u$, 则可以得到 $\beta(u_n)\to\beta(u)=\beta_0(u)$. 利用 (4.12) 式，我们有 $u\in\mathcal{N}_\mu$, $I_\mu(u)=\lim\limits_{n\to\infty}I_{\lambda_n,\mu}(u_n)\le c_{\mu,r}$. 再利用引理 4.4, 则有 $\beta(u)\in\Omega_{r/2}^+$, 这与我们的假设 $\beta(u_n)\notin\Omega_r^+$ 矛盾.

情况 2 $\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x>F(u)+\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$.

在这种情况下，存在 $t_\mu\in(0,1)$, 使得 $t_\mu u\in\mathcal{N}_\mu$, 从而有

$$\begin{aligned}c_\mu&\le I_\mu(t_\mu u)\\&=\frac{t_\mu^2}{2}\|u\|_0^2+\frac{t_\mu^4}{4}F(u)-\frac{t_\mu^p}{p}\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x-\frac{t_\mu^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\\&=\frac{t_\mu^2}{3}\|u\|_0^2+\frac{t_\mu^4}{12}F(u)-(\frac{1}{p}-\frac{1}{6})t_\mu^p\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用 $u_n\in\mathcal{N}_{\lambda_n,\mu}$, 则有

$$\begin{aligned}I_{\lambda_n,\mu}(u_n)&=\frac{1}{2}\|u_n\|_{\lambda_n}^2+\frac{1}{4}F(u_n)-\frac{\mu}{p}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\|u_n\|_{\lambda_n}^2+\frac{1}{12}F(u_n)-(\frac{1}{p}-\frac{1}{6})\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
c_\mu+(\frac{1}{p}-\frac{1}{6})t_\mu^p\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x &\le \frac{t_\mu^2}{3}\|u\|_0^2+\frac{t_\mu^4}{12}F(u)\\
&\le \liminf_{n\to\infty}\Big(\frac{t_\mu^2}{3}\|u_n\|_0^2+\frac{t_\mu^4}{12}F(u_n)\Big)\\
&\le \liminf_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{3}\|u_n\|_0^2+\frac{1}{12}F(u_n)\Big)\\
&\le \liminf_{n\to\infty}\Big(I_{\lambda_n,\mu}(u_n)+(\frac{1}{p}-\frac{1}{6})\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u_n|^p\mathrm{d}x\Big)\\
&\le c_{\mu,r}+(\frac{1}{p}-\frac{1}{6})\mu\int_{\mathbb{R}^3}|u|^p\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

那么，利用引理 4.3, 我们有 $t_\mu=1+o_\mu(1)$. 从而有

$$
\Big|\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(t_\mu u)|^2\mathrm{d}x\Big|\le 3(c_{\mu,r}-c_\mu)+o_\mu(1)+o_n(1). \tag{4.15}
$$

注意到在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中， $u_n\rightharpoonup u$, 利用 (4.15) 式，则有

$$
\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla(u_n-t_\mu u)|^2\mathrm{d}x\le 3(c_{\mu,r}-c_\mu)+o_\mu(1)+o_n(1).
$$

所以有

$$
\int_{\mathbb{R}^3}(u_n-t_\mu u)^6\mathrm{d}x\le\frac{1}{S^3}\Big[3(c_{\mu,r}-c_\mu)+o_\mu(1)+o_n(1)\Big]^3.
$$

那么，对充分小的 μ 和充分大的 n, 我们有

$$
|\beta(u_n)-\beta(t_\mu u)|\le\frac{r}{2}.
$$

利用 $I_{\lambda_n,\mu}(u_n)\le c_{\mu,r}$, 易知 $I_\mu(t_\mu u)\le c_{\mu,r}+o_\mu(1)$. 因此，利用引理 4.4, 可以得到 $\beta(t_\mu u)=\beta_0(t_\mu u)\in\Omega_{r/2}^+$, 这与我们的假设 $\beta(u_n)\notin\Omega_r^+$ 矛盾. 引理 4.5 证毕. ▎

5 多重解的存在性

引理 5.1[11] 假设 I 是定义在 C^1 Finsler 流形 M 上的 C^1 泛函. 如果 I 下方有界并且满足 (PS) 条件，那么 I 至少有 $cat_M M$ 不同的临界点.

引理 5.2[7] 假设 Γ,Ω^+,Ω^- 是闭子集，满足 $\Omega^-\subset\Omega^+$, $\Phi:\Omega^-\to\Gamma$, $\beta:\Gamma\to\Omega^+$ 是两个连续映射，使得 $\beta\circ\Phi$ 与单位映射 $Id:\Omega^-\to\Omega^+$ 同伦等价，那么 $cat_\Gamma\Gamma\ge cat_{\Omega^+}\Omega^-$.

定义 $u_r\in H_0^1(B_r(0))$ 是泛函 $I_{\mu,r}$ 的一个临界点，满足

$$
I_{\mu,r}(u_r)=c_{\mu,r},\qquad I'_{\mu,r}(u_r)=0.
$$

定义 $\Psi_r\ :\ \Omega_r^-\to H_0^1(\Omega)$,

$$
\Psi_r(y)(x)=\begin{cases}u_r(|x-y|), & x\in B_r(y),\\ 0, & x\in\Omega\setminus B_r(y).\end{cases}
$$

它是连续的，并且满足

$$\beta(\Psi_r(y)) = y, \quad y \in \Omega_r^-. \tag{5.1}$$

另外

$$\Psi_r(y)(x) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}, \quad I_{\lambda,\mu}(\Psi_r(y)(x)) = I_{\mu,r}(\Psi_r(y)(x)) = c_{\mu,r}. \tag{5.2}$$

定理 1.2 的证明 对于 $\lambda > \lambda^*$ 和 $\mu < \mu^*$, 定义两个映射

$$\Omega_r^- \xrightarrow{\Psi_r} I_{\lambda,\mu}^{c_{\mu,r}} \xrightarrow{\beta} \Omega_r^+,$$

其中 $I_{\lambda,\mu}^{c_{\mu,r}} = \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu} \mid I_{\lambda,\mu} \le c_{\mu,r}\}$. 利用引理 4.5 和 (5.2) 式，这两个定义是良好的. 因为对于 $c \le c_{\mu,r}$, $I_{\lambda,\mu}$ 在 $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ 上满足 $(PS)_c$ 条件. 利用引理 5.1, $I_{\lambda,\mu}$ 在 $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ 上至少有 $cat_{I_{\lambda,\mu}^{c_{\mu,r}}}(I_{\lambda,\mu}^{c_{\mu,r}})$ 个临界点. 那么， (5.1) 式和引理 5.2 确保了 $I_{\lambda,\mu}$ 在 $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ 上至少有 $cat_{\Omega_r^+}(\Omega_r^-)$ 个临界点，从而，在 E 上至少有 $cat_{\overline{\Omega}}(\overline{\Omega})$ 个临界点. 因此，问题 (1.1) 至少有 $cat_{\overline{\Omega}}(\overline{\Omega})$ 个解. 定理 1.2 证毕.

参 考 文 献

[1] Alves C O, Barros L M. Existence and multiplicity of solutions for a class of elliptic problem with critical growth. Monatsh Math, 2018, **187**: 195–215

[2] Alves C O, Ding Y. Multiplicity of positive solutions to a p-Laplacian equation involving critical nonlinearity. J Math Anal Appl, 2003, **279**: 508–521

[3] Ambrosetti A. On Schrödinger-Poisson systems. Milan J Math, 2008, **76**: 257–274

[4] Bartsch T, Pankov A, Wang Z. Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well. Commun Contemp Math, 2001, **3**: 549–569

[5] Bartsch T, Wang Z. Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$. Comm Partial Differential Equations, 1995, **20**: 1725–1741

[6] Bartsch T, Wang Z. Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation. Z Angew Math Phys, 2000, **51**: 366–384

[7] Benci V, Cerami G. The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems. Arch Rational Mech Anal, 1991, **114**: 79–93

[8] Benci V, Fortunato D. An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations. Topol Methods Nonlinear Anal, 1998, **11**: 283–293

[9] Brézis H, Lieb E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proc Amer Math Soc, 1983, **88**: 486–490

[10] Cerami G, Vaira G. Positive solutions for some non-autonomous Schrödinger-Poisson systems. J Differential Equations, 2010, **248**: 521–543

[11] Chang K. Infinite-Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems. Boston: Birkhäuser, 1993

[12] Clapp M, Ding Y. Positive solutions of a Schrödinger equation with critical nonlinearity. Z Angew Math Phys, 2004, **55**: 592–605

[13] Ding Y, Szulkin A. Bound states for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential. Calc Var Partial Differential Equations, 2007, **29**: 397–419

[14] 方立婉，黄文念，汪敏庆. 临界情形下 Schrödinger-Maxwell 方程的基态解. 数学物理学报，2019, **39A**(3): 475–483
Fang L, Huang W, Wang M. Ground-state solutions for Schrödinger-Maxwell equations in the critical growth. Acta Math Sci, 2019, **39A**(3): 475–483

[15] 冯晓晶. 带有双临界项的薛定谔 - 泊松系统非平凡解的存在性. 数学物理学报， 2020, **40A**(6): 1590–1598
Feng X. Nontrivial solution for Schrödinger-Poisson type systems with double critical terms. Acta Math Sci, 2020, **40A**(6): 1590–1598

[16] Jiang Y, Zhou H. Schrödinger-Poisson system with steep potential well. J Differential Equations, 2011, **251**: 582–608

[17] Jin T, Yang Z. The fractional Schrödinger-Poisson systems with infinitely many solutions. J Korean Math Soc, 2020, **57**: 489–506

[18] Landkof N. Foundations of Modern Potential Theory. New York: Springer-Verlag, 1972

[19] Sun J, Wu T. Ground state solutions for an indefinite Kirchhoff type problem with steep potential well. J Differential Equations, 2014, **256**: 1771–1792

[20] Yang Z, Yu Y, Zhao F. Concentration behavior of ground state solutions for a fractional Schrödinger-Poisson system involving critical exponent. Commun Contemp Math, 2019, **21**: 1–46

[21] Yang Z, Zhang W, Zhao F. Existence and concentration results for fractional Schrödinger-Poisson system via penalization method. Electron J Differential Equations, 2021, **14**: 1–31

[22] Ye Y, Tang C. Existence and multiplicity of solutions for Schrödinger-Poisson equations with sign-changing potential. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, **53**: 383–411

[23] Zhang J, Lou Z. Existence and concentration behavior of solutions to Kirchhoff type equation with steep potential well and critical growth. J Math Phys, 2021, **62**: 1–14

[24] Zhao L, Liu H, Zhao F. Existence and concentration of solutions for the Schrödinger-Poisson equations with steep well potential. J Differential Equations, 2013, **255**: 1–23

[25] Zhao L, Zhao F. Positive solutions for Schrödinger-Poisson equations with a critical exponent. Nonlinear Anal, 1998, **11**: 283–293

Multiplicity of Solutions for a Class of Critical Schrödinger-Poisson System with Two Parameters

[1]Chen Yongpeng [2]Yang Zhipeng

([1]*School of Science, Guangxi University of Science and Technology, Guangxi Liuzhou 545006;*
[2]*Mathematical Institute, Georg-August-University of Göttingen, Göttingen 37073*)

Abstract: In this paper, we consider the following critical Schrödinger-Poisson system

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda V(x)u + \phi u = \mu |u|^{p-2}u + |u|^4 u, & x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where λ, μ are two positive parameters, $p \in (4,6)$ and V satisfies some potential well conditions. By using the variational arguments, we prove the existence of ground state solutions for λ large enough and $\mu > 0$, and their asymptotical behavior as $\lambda \to \infty$. Moreover, by using Lusternik-Schnirelmann theory, we obtain the existence of multiple solutions if λ is large and μ is small.

Key words: Critical exponent; Asymptotical behavior; Multiple solutions.

MR(2010) Subject Classification: 35A15; 35B40; 35J20